

対偶を利用する証明

____年 ____組 名前

/10

■ m, n は整数とする。次の命題を証明しなさい。

m^2+n^2 が 4 の倍数であるとき、 $m+n$ は偶数である。

■ n は整数とする。次の命題を証明しなさい。

m^2+n^2 が 4 の倍数であるとき、 $m+n$ は偶数である。

① 対偶をとる

この命題の対偶「 $m+n$ が奇数ならば、 m^2+n^2 は 4 の倍数ではない。」について、

対偶の証明

$m+n$ が奇数であるとき、

m は奇数で n は偶数 または m は偶数で n は奇数 である。

整数 s, t を用いて、

[i] m は奇数で n は偶数であるとき、 $m=2s+1, n=2t$ と表される。

$$\begin{aligned} \text{このとき、} m^2+n^2 &= (2s+1)^2+(2t)^2 \\ &= 4s^2+4s+1+4t^2 \\ &= 4(s^2+s+t^2)+1 \end{aligned}$$

② 式に表し、
計算する

ここで、 s, t が整数 であることより、

(s^2+s+t^2) も整数、
よって、 $4(s^2+s+t^2)+1$ は 4 の倍数ではない。

③ 計算した式の
意味を読み取る

[ii] m は偶数で n は奇数であるとき、 $m=2s, n=2t+1$ と表される。

$$\begin{aligned} \text{このとき、} m^2+n^2 &= (2s)^2+(2t+1)^2 \\ &= 4s^2+4t^2+4t+1 \\ &= 4(s^2+t^2+t)+1 \end{aligned}$$

②' 式に表し、
計算する

ここで、 s, t が整数 であることより、

(s^2+t^2+t) も整数、
よって、 $4(s^2+t^2+t)+1$ は 4 の倍数ではない。

③' 計算した式の
意味を読み取る

[i], [ii]より、この対偶は真である。

対偶が真であることから、もとの命題も真であるといえる。

④ 対偶と命題の真偽の一致